Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	Cours Équations et inéquations	Niveau : 3éme_Collège Année : 2023-2024

1 Équations

Définition

Une **équation** est une égalité entre deux expressions littérales contenant des nombres **inconnues** représentés par des lettres.
Résoudre une équation signifie trouver toutes les valeurs possibles des inconnues pour lesquelles l'égalité est vraie.

Exemples : Dans la pratique il est possible de dire si un nombre est solution d'une équation sans résoudre celle-ci :

$$7x + 9 = 2x + 27$$

En testant l'égalité pour $x = -2$:

$$7x + 9 = 2x + 27$$

$7 \times (-2) + 9$	$2 \times (-2) + 27$
$-14 + 9$	$-4 + 27$
-5	23

$-5 \neq 23$ donc -2 **n'est pas une solution de l'équation.**

En testant l'égalité pour $x = 3,6$:

$$7x + 9 = 2x + 27$$

$7 \times 3,6 + 9$	$2 \times 3,6 + 27$
$25,2 + 9$	$7,2 + 27$
$34,2$	$34,2$

Donc $3,6$ **est une solution de l'équation.**

$$7x^3 - 2y = (x - y)^2 - 3$$

C'est une équation à **deux inconnues** (x et y) de **degré 3** (car le plus grand exposant des inconnues est 3)
Si on remplace x par 0 et y par 1 on trouve alors dans le membre de gauche -2 et dans le membre de droite -2 aussi, $(0; 1)$ est donc une solution de l'équation (il y en à d'autres).
Dans ce chapitre nous n'étudierons que les équations à une inconnue.

Propriété

On ne change pas les solutions d'une équation si l'on ajoute, soustrait, multiplie ou divise chaque membre par un **même nombre** non nul.

Remarque : Cette propriété va servir à résoudre une équation. **Pour cela il faudra se fixer comme objectif d'isoler les termes en x dans le membre de gauche et les nombres dans le membre de droite.**

Exemples et problème :

Tâchons de résoudre l'équation $8 - 7x = 13x + 25$.

$$\begin{aligned}
8 - 7x &= 13x + 25 && \\
8 - 7x - 13x &= \underbrace{13x - 13x}_{=0} + 25 && \textit{On soustrait } 13x \textit{ dans chaque membre} \\
8 - 7x - 13x &= 25 && \textit{On peut passer directement de la } 1^{\text{ère}} \textit{ à la } 3^{\text{ème}} \textit{ ligne} \\
8 - 20x &= 25 && \\
-20x &= 25 - 8 && \textit{On soustrait } 8 \textit{ dans chaque membre} \\
-20x &= 17 && \textit{On divise chaque membre par } -20 \\
x &= \boxed{\frac{17}{-20}} && \textit{On trouve alors la solution}
\end{aligned}$$

Tâchons de résoudre l'équation $-3(7 - 11x) = 3x + 15$.

$$\begin{aligned}
-3(7 - 11x) &= 3x + 15 && \textit{On développe le membre de gauche} \\
-21 + 33x &= 3x + 15 && \textit{pour aller plus vite on place} \\
33x - 3x &= 15 + 21 && \textit{tous les termes en } x \textit{ à gauche} \\
30x &= 36 && \textit{et les nombres à droite en faisant} \\
x &= 36 \div 30 && \textit{attention aux signes} \\
x &= \boxed{1,2}
\end{aligned}$$

Résolution d'un problème concret :

Plusieurs personnes mangent ensemble dans un restaurant. À la fin du repas elles décident de partager la note. Si chaque personne donne 25 € alors il y aura au total 13 € de trop et si chaque personne donne 20 € alors il manquera 32 €. Combien y avait-il de personnes au restaurant ? Quel était le prix total du repas ?

Résolution :

On résout un problème en trois étapes : 1) Choix de l'inconnue. 2) Mise en équation du problème et résolution. 3) Réponse.

1) Soit x le nombre de personnes présentes au repas.

2) Le prix du repas est alors : $25x - 13$ car si chaque personne donne 25 € il y a alors 13 € de trop. Le prix du repas peut aussi s'écrire $20x + 32$ car si chaque personne donne 20 € il manquera alors 13 €. On a donc l'équation :

$$\begin{aligned}
25x - 13 &= 20x + 32 \\
25x - 20x &= 32 + 13 \\
5x &= 45 \\
x &= \frac{45}{5} = 9
\end{aligned}$$

3) Il y avait donc 9 personnes au restaurant. De plus en remplçant x par 9 on trouve le prix du repas : $25 \times 9 - 13 = 225 - 13 = 212$ soit 212 €.

2 Équations produit nul

Propriété

Un **produit** de facteurs est **nul** si et seulement si au moins l'un des **facteurs est nul**.

Remarque : le "*si et seulement si*" présent dans la propriété est très classique en mathématiques, il signifie que la propriété marche dans les deux sens : si le produit est nul alors un des facteurs est nul et réciproquement si l'un des facteurs est nul alors le produit est nul.
Dans la pratique cette propriété servira à résoudre des équations de degré plus grand que 1, voici les exemples :

Quatre exemples importants :

- $(5x-3)(2x+7)=0$ si on développe le membre de gauche de cette équation on verra qu'elle est de degré 2. C'est aussi un produit de deux facteurs : $(5x-3)$ et $(2x+7)$, ce produit étant nul la propriété précédente nous dit que l'on a :

$$\begin{array}{rcl} 5x-3 &=& 0 \\ 5x &=& 3 \\ x &=& \boxed{\frac{3}{5}} \end{array} \quad \textit{ou alors} \quad \begin{array}{rcl} 2x+7 &=& 0 \\ 2x &=& -7 \\ x &=& \boxed{\frac{-7}{2}} \end{array}$$

L'équation a donc deux solutions : $\frac{3}{5}=$ et $\frac{-7}{2}$.

- $(x+4)(2x-3)(7x-11)=0$ de même que précédemment (*il faut citer au moins une fois la propriété*) :

$$\begin{array}{rcl} x+4 &=& 0 \\ x &=& \boxed{-4} \end{array} \quad \textit{ou alors} \quad \begin{array}{rcl} 2x-3 &=& 0 \\ 2x &=& 3 \\ x &=& \boxed{\frac{3}{2}} \end{array} \quad \textit{ou alors} \quad \begin{array}{rcl} 7x-11 &=& 0 \\ 7x &=& 11 \\ x &=& \boxed{\frac{11}{7}} \end{array}$$

L'équation a donc trois solutions : -4, $\frac{3}{2}=$ et $\frac{11}{7}$.

- $(4x-9)^2+(4x-9)(x+15)=0$ ici c'est un petit peu plus compliqué puisqu'il ne s'agit pas d'un produit de facteurs ! Dans ce cas il faut penser à **factoriser** d'abord !

$$\begin{array}{rcl} (4x-9)^2+(4x-9)(x+15) &=& (\underline{4x-9})(4x-9)+(\underline{4x-9})(x+15) \\ &=& (4x-9)(4x-9+x+15) \\ &=& (4x-9)(5x+6) \end{array}$$

On peut maintenant appliquer la même méthode qu'auparavant, on trouvera alors deux solutions : $\frac{9}{4}$ et $\frac{-6}{5}$.

- $(8x+7)^2-64=0$ si le facteur commun n'est pas évident il faut alors penser aux **identités remarquables** pour factoriser !

$(8x+7)^2-64$
$(8x+7)^2-8^2$ on reconnaît l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ où $a=(8x+7)$ et $b=8$.
Donc :
$(8x+7)^2-8^2=(8x+7+8)(8x+7-8)=(8x+15)(8x-1)$, on a ainsi un produit de facteurs, il est alors possible de résoudre l'équation comme auparavant, on trouvera deux solutions : $\frac{-15}{8}$ et $\frac{1}{8}$.

3 Inéquations

Définition

Une **inéquation** est une **inégalité** entre deux expressions littérales qui peut être vraie ou fausse selon les valeurs des inconnues.
Résoudre une inéquation signifie trouver toutes les valeurs possibles des inconnues pour lesquelles l'inégalité est vraie.

Exemple : l'inégalité $x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$

En testant l'inégalité pour $x = 4$:

$x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$

$\begin{array}{l|l} 4^2 - 5 & (4-2)^2 + 3 \\ 16 - 5 & 4 + 3 \\ 11 & 7 \end{array}$

$11 \not\leqslant 7$ donc 4 **n'est pas une solution de l'inéquation.**

En testant l'inégalité pour $x = 0$:

$x^2 - 5 \leqslant (x-2)^2 + 3$

$\begin{array}{l|l} 0^2 - 5 & (0-2)^2 + 3 \\ -5 & 4 + 3 \\ & 7 \end{array}$

$-5 \leqslant 7$ donc 0 **est une solution de l'équation.**

Remarque : 0 est donc une solution de l'inéquation mais c'est loin d'être la seule ($1\,;\ 1,5\,;\ 2$ en sont aussi...). On peut réussir à trouver toutes les solutions en appliquant certaines règles :

Propriété

On ne change pas les solutions d'une inéquation si l'on ajoute ou soustrait un **même nombre** à chaque membre.

On ne change pas les solutions d'une inéquation si l'on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre **positif**.

Lorsque l'on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre **négatif** on doit **changer le sens de l'inégalité** pour consever les solutions.

Remarque : En conclusion, pour résoudre une inéquation on applique exactement la même méthode que pour résoudre une équation à la différence près que si l'on multiplie ou divise les membres par un nombre négatif il faut changer le sens de l'inégalité.

Exemple : Tâchons de résoudre l'inéquation $-3x + 7 \leqslant 2x + 13$

$$\begin{aligned} -3x + 7 &\leqslant 2x + 13 \\ -3x - 2x &\leqslant 13 - 7 \\ -5x &\leqslant 6 \\ x &\geqslant \frac{6}{-5} \\ x &\geqslant -1,2 \end{aligned}$$

On change le sens de l'inégalité car on a divisé par $-5 < 0$

Les solutions de cette équation sont donc tous les nombres supérieurs ou égaux à $-1,2$, donc par exemple $-1\,;\ 0\,;\ \pi$ ...

Un autre exemple : Tâchons de résoudre l'inéquation $8x - 5 > 5x + 22$

$$\begin{aligned} 8x - 5 &> 5x + 22 \\ 8x - 5x &> 22 + 5 \\ 3x &> 27 \\ x &> \frac{27}{3} \\ x &> 9 \end{aligned}$$

On ne change le sens de l'inégalité car on a divisé par $3 > 0$

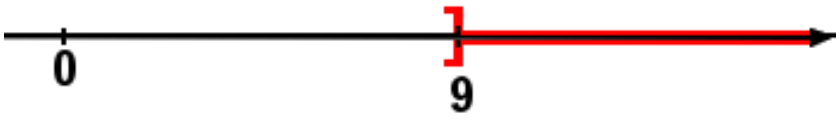
Les solutions de cette équation sont donc tous les nombres strictements supérieurs à 9, donc par exemple $9,1$; 100 ;...

4 Représentation des solutions sur une droite

Définition (Notation)**.**

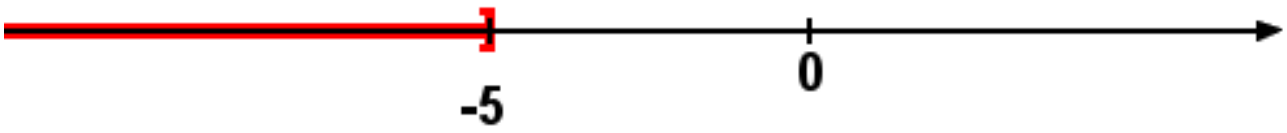
On peut représenter les solutions d'une inéquation à l'aide d'une droite graduée sur laquelle on va surligner ou hachurer les nombres qui sont solutions.

Exemple :
Par exemple dans la dernière inéquation, $\boldsymbol{x > 9}$ on aura :



Remarque importante :
On remarquera le crochet au niveau du nombre 9, il est tourné dans le sens opposé au surlignage, cela signifie que le nombre 9 n'est pas une solution de l'inéquation, en effet on a trouvé $x > 9$ (l'inégalité est stricte).
Si le crochet est tourné dans le même sens que le surlignage cela signifie alors que le nombre fait partie des solutions, par exemple :

pour $\boldsymbol{x \leqslant -5}$ on aura :



Pour $\boldsymbol{x \geqslant 3}$ on aura :

